

# Entropie eines Eiswürfels, Wahrscheinlichkeitsaussagen und Meeresspiegelerhöhung

Manfred Sietz und Burkhard Wrenger\*

## Abstract

Material flows and energy flows can be correlated with sufficient data, e.g. on production energies, annual production quantities and degrees of dissipation with temperature increases in the atmosphere, volumes of molten ice or sea level increases, as well as with probability statements, information densities and management recommendations. All these quantities can be described by the comprehensive term entropy.

In order to consider the efficiency of material and energy flows, the difficulty to understand the concept of entropy with its different definitions can be summarized simply and easily in a model related to ice cubes.

The quality of a model containing percentage probability statements, statements on dissipation in material flow models in connection with statements on information density and its description by the ice cube model is still to be determined in practice in suitable material flow models. Such projects should show the types of mathematical correlations between dissipation degrees, entropy increase, increase of molten ice and sea level rise.

## Keywords

Entropy, Ice Cube, Sustainability, Sea Level Rise, Information Density, Probability Statements, Material Flow Model, Dissipation

## Einleitung

Zur Beschreibung von Umweltleistung und Nachhaltigkeit haben sich in den vergangenen Jahren eine Reihe von Bewertungsansätzen etabliert. CO<sub>2</sub> – und Wasserfußabdrücke gehören zu den bekanntesten Bewertungsverfahren. Wärmefußabdrücke, beschrieben durch das Modell eines Eiswürfels (1) haben sich in den vergangenen Jahren als sehr effektiv erwiesen, weil sie sehr gut verständlich sind und die Folgen nicht nachhaltigen Verhaltens begreifbar machen. Ein weiterer Ansatz, der wie das Eiswürfelmodell auf Entropiebetrachtungen basiert, ist das von Rechberger et. al. (5,6) entwickelte Modell der entropiebasierten Stoffstromanalyse. Damit existieren zwei entropiebasierte Modelle, die jedoch für unterschiedliche Anwendungszwecke – Energiebilanzen und Stoffströme – entwickelt wurden. Das

nachfolgend vorgestellte Modell versucht die Zusammenführung beider Ansätze mit dem Ziel, das Eiswürfelmodell auch für Stoffstrombetrachtungen einsetzen zu können. Dazu werden im folgenden Kapitel die Grundlagen anhand eines Denkmodells vorgestellt. Im dritten Kapitel werden die Entropiebetrachtungen auf zwei ausgewählte Stoffströme und zugehörige Eiswürfeläquivalente angewendet. Die Ergebnisse werden im letzten Kapitel zusammengefasst und mit einem Ausblick abgeschlossen.

## Grundlagen

### Entwicklung eines abstrakten Modells

Historisch gesehen führt die Feststellung, dass Energie nicht vollständig in Nutzarbeit umgewandelt werden kann, zum Begriff der Entropie. Zum Verständnis des Begriffes gibt es neben den thermodynamischen und statistischen Definitionen aus der Physik viele Ansätze. Beispielsweise hat Shannon (2) eine informationstheoretische Definition des Entropiebegriffes vorgestellt. Die nachfolgenden Ausführungen versuchen, die drei genannten Definitionen der Entropie mit einem Modell eines Eiswürfels zusammenzufassen, zu veranschaulichen und zu zeigen, dass das Modell eines Eiswürfels den Entropiebegriff aus allen drei Sichtweisen leicht verständlich beschreiben kann und dass dieser Ansatz auf Stoffströme übertragbar ist. Auf dem Weg dazu wird das Bild einer Buchstabensuppe verwendet. Es abstrahiert die weiteren Überlegungen immer weiter bis hin zu einer unendlich verdünnten Buchstabensuppe im gefrorenen Zustand – bestehend aus reinen Eiswürfeln.

Ein System, beispielsweise ein Suppentopf, mit Buchstaben und mit Wasser, bestehe aus einer bestimmten Anzahl von Teilchen (z.B. Atome, Moleküle, Buchstaben etc.). Die Entropie des Systems „Buchstabensuppe“ erhöht sich makroskopisch betrachtet, wenn bei gegebener Temperatur Wärme (Erhitzen auf dem Herd) und/oder Arbeit (Rühren) zugeführt wird.

Die Entropie des Systems Buchstabensuppe erhöht sich mikroskopisch betrachtet mit der Zahl der im System erreichbaren Mikrozustände. Die Zahl der im System Buchstabensuppe erreichbaren Mikrozustände korrespondiert mit einer Informationsdichte. Die Entropie der Buchstabensuppe steigt nicht nur durch Erhitzen oder Rühren, sondern auch durch die Zahl der verschiedenen Buchstaben in der Suppe. Wird die Suppe auf 273 K abgekühlt und enthält (oben) schwimmende Eiswürfel, in denen vereinfacht alle Buchstaben (sozusagen als Kristallisationskeime) eingefroren sind, steigt die Wahrscheinlichkeit, Buchstaben zu finden, auf einen maximalen Wert. Eine Suppenkelle erfasst mit einem Hub mehr Buchstaben im Vergleich zu einer kochenden Suppe mit einer weit größeren räumlichen Buchstabenverteilung im Suppentopf. Der Zustand bei Temperaturen unterhalb 273 K korreliert mit einer maximalen Informationsdichte und einer vergleichsweise geringen Entropie. Eine kochende Suppe korreliert wegen der maximalen

Durchmischung und vollständigen räumlichen Verteilung der Buchstaben mit einer minimalen Informationsdichte und einer vergleichsweise hohen Entropie.

### Verknüpfung von Stoff- und Energieströmen

Was passiert mit der Informationsdichte, wenn der Suppentopf schneller erhitzt wird, als er Wärme mit der Umgebung austauschen kann und zudem mit einem gedachten Deckel<sup>1</sup> versehen wird? Die Buchstabensuppe kocht über. Aus der Alltagsbeobachtung einer überkochenden Buchstabensuppe leitet sich die Annahme ab, dass das Zusammenwirken

- des Maßes der Wärmezufuhr,
- des Faktors Zeit und
- die Anwesenheit von Klimagasen („Deckel“) im atmosphärischen Fenster

eine Beschreibung die Hauptursachen des Klimawandels ermöglicht.

Eine Konsequenz des Zusammenwirkens der drei genannten Ursachen ist, dass eine ausschließliche Konzentration der Klimadiskussionen auf die Entcarbonisierung, auf die CO<sub>2</sub>-Reduktion, vielleicht nicht ausreichend ist. Das Zusammenwirken der drei genannten Ursachen Geschwindigkeit der Wärmezufuhr, der Zeit und die Anwesenheit von Klimagasen bedeutet, dass neben der Konzentration auf Klimagase auch die Betrachtung

- der Energieeffizienz,
- der Wirkungsgrade,
- der Verringerung sowie Verlangsamung der Dissipation von Stoffen und
- der Verringerung und Verlangsamung von Entropieeinträgen in die Atmosphäre

erforderlich ist.

Für die folgenden Betrachtungen seien die Systemgrenzen auf die Erde ausgedehnt.  
(1)

In dem überdimensionalen und gedachten Suppentopf sind alle Stoffströme mit Energieströmen und diese mit Entropieänderungen verbunden. Die Basis des Stoffstrommodells sei ein Eiswürfel aus der Buchstabensuppe mit der Masse 1 kg bei 0 Grad Celsius, schwimmend in 0 Grad Celsius kaltem Wasser, also 273 K. Der

---

<sup>1</sup> Der Deckel kann im Sinne unserer Atmosphäre als Schicht von Klimagasmolekülen (wärmeabsorbierende Gase, wie z.B. CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>O etc.) angenommen werden.

Eiswürfel aus der Buchstabensuppe gleicht einem schwimmenden Eisberg an den Polen.<sup>2</sup>

Der feste Eiswürfel hat unter den o.g. Bedingungen eine absolute Entropie von 2500 J/K kg (3) und stellt für unsere Betrachtungen einen Zustand von näherungsweise maximaler Ordnung mit der kleinsten Zahl an erreichbaren Mikrozuständen im gedachten Topf Buchstabensuppe dar.

Wird der Eiswürfel mit der Masse 1 kg und der Temperatur von 273 K geschmolzen, so muss ihm dazu eine Schmelzentropie von 1222 J/K kg zugefügt werden. 1 kg flüssiges Wasser bei 273 K hat – auf die Dichte 1 g/cm<sup>3</sup> normiert – eine absolute Entropie von 3888 J/ K kg. (3)

Wird 1 kg flüssiges Wasser von 273 K weiter auf 373 K erwärmt und vollständig verdampft, so erhöht sich der Entropieinhalt um den Betrag der Verdampfungsentropie von 6055 J/K kg auf eine absolute Entropie von 9943 J/K kg. (4) Das bei 373 K vollständig verdampfte Wasser sei ein Zustand maximaler Unordnung mit der maximalen Zahl an erreichbaren Mikrozuständen im gedachten Topf Buchstabensuppe.

Nun sei den Zuständen maximaler Ordnung bzw. Unordnung eine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung zugeordnet und ein Wassermolekül im Eiswürfel bei 273 K (Die Schwingungen des Wassermoleküls um seine Gitterposition im Eiswürfel seien vernachlässigt) bzw. im Wasserdampf bei 373 K betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Wassermolekül ortsfest im 273 K kaltem Eiswürfel befindet, ist gleich 100 %. Der Eiswürfel mit seinen vollständig eingefrorenen Buchstaben korreliert mit einer maximalen Informationsdichte, weil alle Buchstaben ortsfest zur Verfügung stehen, um ein sinnvolles Wort zu bilden. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Wassermolekül im Raum eines gedachten Eiswürfels bei 373 K ortsfest befindet, ist nahezu 0 %.

### Zwischenergebnis

Als Zwischenergebnis lässt sich festhalten:

Um 1 kg Wassermoleküle im Eis einer Buchstabensuppe von 273 K bei 373 K vollständig zu verdampfen, nimmt die Entropie dieses Kilogramms Wasser um 7277 J/K kg zu. Umgerechnet korreliert 1 m<sup>3</sup> Wasser der Dichte 1 000 kg/m<sup>3</sup> beim vollständigen Verdampfen bei 373 K mit 7277 kJ/K kg. Dies entspricht einer Wahrscheinlichkeitsabnahme von 100 %, was den Ort eines Wassermoleküls im ursprünglichen Eiswürfel angeht.

---

<sup>2</sup> Die „festgefrorenen“ Buchstaben können damit den im Eis festgefrorenen Informationen und Gasen aus erdgeschichtlich früheren Zeiten entsprechen.

## Arbeitshypothesen

Für die nachfolgenden Betrachtungen sollen folgende Arbeitshypothesen gelten:

Der zugeführte Entropiebetrag von +7277 kJ/K kg für ein Volumen von einem Kubikmeter Wasser (vom Eiswürfel zum Wasserdampf) korreliert mit dem Zustand minimaler Informationsdichte.

Der Entropiedifferenzbetrag von -7277 kJ/K kg für ein Volumen von einem Kubikmeter Wasser (vom Wasserdampf zum Eiswürfel) korreliert mit dem Zustand maximaler Informationsdichte – unter der bereits erwähnten Annahme, die Buchstaben seien in einem Eiswürfel konzentriert.

Nach dem Eiswürfelmodell (2) ergibt sich das Volumen  $V_{\text{Eis}}$  des geschmolzenen Eises aus dem Quotienten aus Schmelzwärme  $Q$  und dem Produkt aus der Eisdichte (bei 273 K) von  $918 \text{ kg/m}^3$  und der Schmelzenthalpie  $334,4 \text{ kJ/kg}$  (für eine unendlich verdünnte Buchstabensuppe) wie folgt:

$$V_{\text{Eis}} = Q \text{ (kJ)} / \text{Eisdichte (} 918 \text{ kg/m}^3\text{)} \times \text{Schmelzenthalpie (} 334,4 \text{ kJ/kg)}. \quad (2)$$

Im nächsten Schritt wird das Eiswürfelmodell auf Stoffstrommodelle angewendet, mit dem Ziel, sinnvolle Managementaussagen zur Effizienzsteigerung abzuleiten.

## Anwendung des Modells auf ausgewählte Stoffströme

Das oben entwickelte Modell wird auf zwei konkrete Stoffströme angewendet. Um die mögliche Anwendungsbreite darzustellen und die Verknüpfung zu den Arbeiten von Rechberger et.al. aufzuzeigen, werden die Stoffströme von Metallblechen sowie von Dünger betrachtet (5,6).

Für die Verknüpfung geschmolzener Eiswürfel und dem Energieverbrauch bei der Herstellung von Rohstoffen und um Aussagen zu Stoff- sowie Energieströmen treffen zu können, ist es notwendig, Dissipation mit Angaben zu Herstellungsenergien zu verbinden. Beispielhaft erfolgt dies anhand von Kupferblech, Alublech und zu den Düngeparametern  $\text{P}_2\text{O}_5$  und N. Anlass zur nachfolgenden Betrachtung geben die von H. Rechberger 2002 veröffentlichten entropiebasierten Analysen europäischer Kupferkreisläufe mit Methoden der statistischen Entropie (5,6).

Laut (7) liegt der Energieverbrauch von Kupferblech (Gehalt Cu größer/gleich 99,9%) mit 40 %igem Recyclatanteil bei  $113 \text{ MJ/kg}$ . Im Vergleich dazu nach derselben Quelle liegt Aluminiumblech mit 0% Recyclatanteil bei  $210 \text{ MJ/kg}$ .

Laut der UBA Studie vom August 2018 „Ökobilanzieller Vergleich der P-Rückgewinnung aus dem Abwasserstrom mit der Düngemittelproduktion aus Rohphosphaten unter Einbeziehung von Umweltfolgeschäden und deren Vermeidung“ (8) liegt der Energieaufwand für die Herstellung von  $P_2O_5$  („für den deutschen P-Dünger Mix“) unter Ausschluss erneuerbarer Ressourcen bei 27 MJ/ kg  $P_2O_5$ . Laut derselben Quelle benötigt die Herstellung von 1 kg N in etwa so viel Energie wie 2 kg  $P_2O_5$ . Nachfolgend ein Vergleich mit Daten aus einer österreichischen Quelle auf Basis der Methode der statistischen Entropie aus 2017 (9).

Die Herstellung oben genannter Produkte korreliert mit Eiswürfeln unter der Annahme, dass sämtliche Herstellenergie in Wärme umgewandelt wird:

1kg Material	Herstellenergie in MJ/kg	m <sup>3</sup> Eis/kg Material	1 % Substanzverlust „Dissipation“ in einem Stoffkreislauf korrelieren pro kg Material mit der Entropiezunahme von x kJ/ K
Cu (als Blech)	113	0,3681	26,8
Al (als Blech)	210	0,6841	49,8
$P_2O_5$	27	0,088	6,4
N	54	0,1759	12,8

(Die Zahlen in der Spalte m<sup>3</sup> Eis / kg Material beziehen sich rechnerisch auf die Eisdichte von 918 kg/m<sup>3</sup> und erhöhen sich um ca. 8,9 %, wenn auf die Dichte 1000 kg/ m<sup>3</sup> normiert wird).

Die oben aufgeführte Tabelle ist die Arbeitsgrundlage für die weiteren Betrachtungen, mit dem Ziel, Stoff- sowie Energieströme verständlich durch Eiswürfel und Entropiebetrachtungen zu beschreiben.

Zunächst erfolgt die Fokussierung auf Aluminium. Für die Information, eine bestimmte Menge Aluminiumblech befindet sich nahezu zu 100 % in einem bestimmten Stoffkreislauf, muss die Dissipation möglichst klein sein. Ein 100 %iger Stoffstrom mit 0 %iger Dissipation korreliert mit einer maximalen Informationsdichte über den Aufenthaltsraum des Alublechs im einem Wirtschaftsraum. 100 %ige Dissipation entspricht analog einer minimalen Informationsdichte.

1% Dissipation erhöht für Aluminiumblech pro kg die Entropie um 49,8 kJ/ K. Die 1 %ige Dissipation von Aluminiumblech korreliert mit einem Eiswürfel von 0,07 m<sup>3</sup>/kg Aluminiumblech. Hierbei wird als noch zu überprüfende Näherung eine jeweils lineare Zuordnung zwischen Dissipationsgrad, Entropiezunahme und der Zunahme von geschmolzenem Eis bis hin zu einem Meeresspiegelanstieg angenommen.

Wenn für Deutschland ein Aluminiumrecyclinggrad von 70 % angenommen wird – d.h. 30 % Dissipation –, dann erhöht sich pro kg Aluminium die Entropie nach obiger Tabelle um  $30 \times 49,8$  kJ/K. Es muss daher 1,3 mal mehr Aluminium (in Primärdarstellung angenommen) hergestellt werden. Pro kg Aluminium wird bei dem Recyclinggrad vom 70 % rechnerisch  $1,3 \times 0,6841$  m<sup>3</sup> Eis zusätzlich und irreversibel geschmolzen.

Bei einer angenommenen Jahresproduktionsmenge von Aluminium in Deutschland mit 500.000 Tonnen bedeutet der Recyclinggrad von nur 70 % dass 100.000.000 m<sup>3</sup> Eis jährlich zusätzlich, unnötig und irreversibel geschmolzen werden, im Vergleich zu einer 0%igen Dissipation. Dies erhöht den Entropieinhalt des physikalischen Systems Atmosphäre bei gegebener Temperatur um  $100.000.000 \times 7277$  kJ = 727.700.000.000 kJ. Bei einer vereinfacht angenommenen Masse der Atmosphäre von  $5,15 \times 10^{18}$  kg und einer spezifischen Wärmekapazität von Luft mit 1,005 kJ/kg K ergibt sich eine jährliche Temperaturerhöhung der Atmosphäre nach

$$7,277 \times 10^{11} \text{ kJ kg K} / 5,15 \times 10^{18} \text{ kg} \times 1,005 \text{ kJ}$$

von  $1,4 \times 10^{-7}$  K. Auf 100 Jahre berechnet (Zeitraum 2000 bis 2100) ergibt sich im Jahr 2100 eine Temperaturerhöhung von  $1,4 \times 10^{-5}$  K, nur durch die 30%ige Dissipation des Aluminiums in Deutschland. Es braucht also nur 10.000 Vorgänge weltweit in der Größenordnung der 30 %igen Dissipation des Aluminiums in Deutschland, um die Temperatur der Atmosphäre weltweit und für eine bestimmte Zeit betrachtet um ca. 1,4 K zu erhöhen.

Es ist anzunehmen, dass dissipierte Wärme mit einem Anstieg des Meeresspiegels korreliert.

Es sei angenommen, dass nicht nur  $7,277 \times 10^{11}$  kJ an Wärmeenergie wegen der schlechten Recyclinggrade zusätzlich frei wird, sondern ein Großteil des Weltprimärenergieverbrauchs von  $580 \times 10^{15}$  kJ wird als Wärme der Atmosphäre zugeführt und diese Wärmeenergie durch einen immer größer werdenden CO<sub>2</sub> Gehalt der Atmosphäre dort länger festhalten, als der Austausch der Atmosphäre mit dem Universum braucht. Die Wärmemenge von  $7,277 \times 10^{11}$  kJ entspricht dem weltweiten Primärenergieverbrauch im Jahr 2016 (10).

Der weltweite Primärenergieverbrauch von  $580 \times 10^{15}$  kJ im Jahr 2016 führt zu einem jährlich geschmolzenen Eiswürfel von  $1,5 \times 10^{12}$  m<sup>3</sup>, ein Würfel von etwa 12 km Kantenlänge. Auf 100 Jahre berechnet und unter der willkürlichen Annahme einer Verdoppelung des Weltenergieverbrauchs bis zum Jahr 2100 ergibt sich ein Meeresspiegelanstieg von ca. 90 cm. (Zum Verhältnis Eisvorkommen auf der Erde und den Meeresspiegeläquivalenten siehe (11)).

Das Ergebnis der Berechnung zum erwarteten Meeresspiegelanstieg bis zum Jahr 2100 zeigt die gute Näherungsqualität des Eiswürfelmodells eindrucksvoll auf angesichts der derzeit im politischen und wissenschaftlichen Raum angegebenen Vergleichserwartungswerte. (12)

## Zusammenfassung und Ausblick

Stoffströme und Energieströme lassen sich mit ausreichenden Daten z.B. zu Herstellenergien, Jahresproduktionsmengen und Dissipationsgraden mit Temperaturerhöhungen in der Atmosphäre, Volumina geschmolzenen Eises bzw. Meeresspiegelerhöhungen sowie mit Wahrscheinlichkeitsaussagen, Informationsdichten und Managementempfehlungen korrelieren. Alle diese Größen lassen sich durch den umfassenden Begriff der Entropie beschreiben.

Es bietet sich zur Effizienzbetrachtung von Stoff- und Energieströmen an, den schwierig zu verstehenden Entropiebegriff mit seinen unterschiedlichen Definitionen in einem Eiswürfelmodell einfach und leicht verständlich zusammenzufassen.

In welcher Näherungsqualität prozentuale Wahrscheinlichkeitsaussagen, Aussagen zur Dissipation in Stoffstrommodellen in Verbindung mit Aussagen zur Informationsdichte sich im Eiswürfelmodell rechnerisch fassen lassen, ist praxisnah in geeigneten Stoffstrommodellen noch zu ermitteln. Solche Projekte sollen zeigen, ob zwischen Dissipationsgraden, der Entropiezunahme, der Zunahme von geschmolzenem Eis und der Meeresspiegelerhöhung lineare oder andere einfache mathematische Zusammenhänge bestehen.

## Literatur

(1)

„Wärmefußabdrücke und Energieeffizienz - Nachhaltigkeit messbar machen“; M. Sietz (Hrsg.), Verlag Springer Spektrum, Heidelberg (2016)

(2)

„A Mathematical Theory of Communication“; C. E. Shannon; Bell System Technical Journal. Band 27, Nr. 3, S. 379–423 (1948) (3)

<https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/chemie-abitur/artikel/absolute-entropien-und-der-3-hauptsatz-der-thermodynamik>; Zugriff 4.11.2019

(4)

[http://www.pci.tu-bs.de/aggericke/PC1/Kap\\_III/Char\\_Entropieaenderung.htm](http://www.pci.tu-bs.de/aggericke/PC1/Kap_III/Char_Entropieaenderung.htm); Zugriff 4.11.2019

(5)

„A New, Entropy Based Method To Support Waste and Resource Management Decisions“; H. Rechberger u. P.H. Brunner; Environ. Sci. Technol., 36, 809-816 (2002)

(6)

„The contemporary European copper cycle: statistical entropy analysis“; H. Rechberger und T.E. Graedel; Ecological Economics 42 , 59 – 72 (2002)

(7)

[www.nachhaltiges-bauen.de](http://www.nachhaltiges-bauen.de); Zugriff 19.9.19

(8)

„Ökobilanzieller Vergleich der P-Rückgewinnung aus dem Abwasserstrom mit der Düngemittelproduktion aus Rohphosphaten unter Einbeziehung von Umweltfolgeschäden und deren Vermeidung“, Fabian Kraus et.al. ; UBATexte 13/2019

(9)

„Statistical entropy analysis to evaluate resource efficiency: Phosphorus use in Austria“; D. Lauer, O. Zoboli u. H. Rechberger; Ecological Indicators 83, 232 -242 (2017)

(10)

<https://www.bmwi.de/Redaktion/DE/Infografiken/Energie/Energiedaten/Internationaler-Energiemarkt/energiedaten-int-energiemarkt-46.html> ; Zugriff 4.11.2019

(11)

<https://wetter.tagesschau.de/wetterthema/2019/08/26/die-kryosphaere.html>; Zugriff 23.9.2019

(12)

<https://www.umweltbundesamt.de/themen/klima-energie/klimawandel/zu-erwartende-klimaaenderungen-bis-2100>, Zugriff 15.11.2019

\*zu den Autoren:

Prof. Dr. Manfred Sietz

Chemie und Umweltmanagement

Prof. Dr. Burkhard Wrenger

Autonome Sensorsysteme / Autonomous Sensor Systems

beide Autoren:

Technische Hochschule Ostwestfalen-Lippe / Ostwestfalen-Lippe University of  
Applied Sciences and Arts

An der Wilhelmshöhe 44, D-37671 Höxter